مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی
سال ۱۴۰۵، دوره ۱۶، شماره ۱، ص ۵۰–۶۶

شاپا چاپی: ۲۲۵۱-۸۰۸۸
DOI: 10.22055/jamm.2026.49602.2382

جواب تقریبی سیستم معادلات دیفرانسیل جفت شده بیماری کرونا توسط چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم

جمیله دهقان[۱]، محمد هادی اتابک‌زاده [۲*]، محمود علیزاده[۳]، سارا شکرالهی یانچشمه[۴]

[۱,۳,۴]گروه ریاضی، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران
[۲] گروه ریاضی، واحد بوشهر، دانشگاه آزاد اسلامی، بوشهر، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۴/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۳/۱۹
دبیر مسئول: علیرضا فخارزاده جهرمی

چکیده: در این مقاله، یک سیستم معادلات دیفرانسیل کسری جفت شده که گسترش عفونت بیماری کرونا را بین دو گروه جمعیتی دارای علائم آلودگی $(\varphi(t))$ و بدون علائم آلودگی $(\omega(t))$ مدل‌سازی می‌کند، مورد بررسی قرار می‌گیرد. روش عددی پیشنهادی، مبتنی بر بسط چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم همراه با عملگرهای مشتق و انتگرال کسری آتانگانا–بالینو است. نوآوری اصلی این مقاله، نمایش برتری دقت و کارایی این روش در مقایسه با روش متداول چبیشف نوع اول و نیز روش رانگ–کوتای مرتبه چهار (RK4) می‌باشد. برای ارزیابی عینی، معیارهای خطای مربعات میانگین (MSE) و میانگین خطای مطلق (MAE) محاسبه می‌شود. نتایج عددی برای مقادیر مختلف مرتبه کسری (ν) نشان می‌دهد که روش پیشنهادی با (MSE) در حدود 10^{-4} و نرخ همگرایی نمایی، از دقت و کارایی بالاتری برخوردار است. این یافته‌ها، پتانسیل بالای روش حاضر را برای مدل‌سازی دقیق‌تر پدیده‌های اپیدمیولوژیک تأیید می‌کند.

واژه‌های کلیدی: سیستم معادلات دیفرانسیل جفت شده، بیماری کرونا، چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم، مشتق و انتگرال کسری آتانگانا– بالینو.

رده‌بندی ریاضی: 92D30-26A33-34A08.

۱ مقدمه

مدل‌سازی ریاضی بیماری‌های همه‌گیر به‌عنوان ابزاری قدرتمند برای درک دینامیک انتقال، پیش‌بینی روند آینده و ارزیابی اثربخشی مداخلات بهداشتی عمل می‌کند [۳-۱]. در سال‌های اخیر، مدل‌های مبتنی بر مشتقات کسری به‌دلیل قابلیت ذاتی خود در نمایش «حافظه بلندمدت» و «اثرات غیرمحلی» در سیستم‌های بیولوژیکی، توجه فراوانی را به خود جلب کرده‌اند [۹-۴]. برخلاف مشتقات صحیح، مشتقات کسری این امکان را فراهم می‌سازند که تاریخچه گذشته سیستم در رفتار آینده آن تأثیر بگذارد، که این ویژگی برای مدل‌سازی دوره نهفتگی و انتقال بیماری بسیار حیاتی است [۱۵-۱۰].

*آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: محمد هادی اتابک‌زاده، mh.atabakzadeh@iau.ac.ir

اخیراً، محققان متعددی از حسابان کسری برای مدل‌سازی بیماری کرونا استفاده کرده‌اند. برای مثال، خان و آتانگانا [۶] یک مدل کسری برای دینامیک این ویروس ارائه دادند. به‌طور مشابه، توان و همکاران [۱۶] از مشتق کاپوتو برای مدل‌سازی انتقال بیماری کرونا بهره بردند. مطالعات دیگر، ماندهینی و همکاران [۱۷]، اثرات استراتژی واکسیناسیون و دنو و همکارانش [۱۸]، قرنطینه افراد مبتلا بیماری را در مدل کسری گنجانده‌اند. با این حال، بسیاری از این مطالعات اولیه [۱۶، ۱۹] بر روی توسعه مدل‌های تحلیلی متمرکز بوده و چالش‌های عددی مرتبط با حل کارآمد و دقیق این سیستم‌های غیرخطی را به‌طور کامل مورد توجه قرار نداده‌اند.
از سوی دیگر، روش‌های طیفی، از جمله بسط بر پایه چندجمله‌های متعامد، به دلیل دقت نمایی و کارایی محاسباتی بالا، راه‌حلی امیدبخش برای حل عددی معادلات دیفرانسیل هستند [۲۰-۲۴] در این میان، چندجمله‌ای چبیشف نوع اول به‌طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفته است. برای نمونه، حدید و همکاران [۲۰] از چندجمله‌ای چبیشف نوع اول برای حل یک سیستم دینامیکی کسری مرتبط با رشد کرونا استفاده کردند. اگر چه روش‌های طیفی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های متعامد، از جمله چبیشف نوع اول، به‌دلیل دقت نهایی و کارایی محاسباتی بالا به‌عنوان راه‌حلی امیدبخش برای حل عددی معادلات دیفرانسیل مطرح شده‌اند [۲۰-۲۴] اما مطالعات اخیر نشان می‌دهند که در کاربردهای خاصی نظیر مدل‌های اپیدمیولوژیک کسری با عملگرهای پیچیده، روش مبتنی بر چبیشف نوع اول ممکن است با محدودیت‌هایی مواجه شود، برای مثال، مقاله محمود (۲۰۲۵) نشان می‌دهد که بهره‌گیری از چبیشف نوع دوم می‌توانند نرخ همگرایی را بهبود دهد، ماتریس‌های مشتق را ساده‌تر بسازد و کارایی محاسباتی را ارتقاء دهد [۲۵] و بنابراین پیشنهاد می‌شود از مدل‌سازی کسری مبتنی بر چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم برای رشد بیماری کرونا استفاده شود.
بنابراین، شکاف پژوهشی اصلی که این مقاله به آن می‌پردازد، کمبود مطالعات نظام‌مند است که به‌صورت کمی، دقت و کارایی روش مبتنی بر چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم را در حل سیستم‌های کسری پیچیده اپیدمیولوژیک، در مقایسه با چبیشف نوع اول و روش‌های استانداردی مانند RK4، ارزیابی کند.
هدف این مقاله، پر کردن این شکاف است. ما یک سیستم معادلات دیفرانسیل جفت شده بیماری کرونا را با استفاده از چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم و عملگرهای جدید آتانگانا-بالینو [۱۳، ۲۵] حل می‌کنیم. نوآوری ما در ارائه یک الگوریتم گام به گام شفاف، انجام یک تحلیل خطای کمی جامع، بررسی همگرایی عددی و تحلیل حساسیت نسبت به تغییرات مرتبه کسری است. نتایج، به‌وضوح برتری روش پیشنهادی را تأیید می‌کنند.
ساختار این مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲، تعاریف پایه ارائه می‌شود. در بخش ۳، مدل ریاضی بیماری کرونا فرمول‌بندی می‌گردد. در بخش ۴، روش حل با استفاده از چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم به تفصیل شرح داده می‌شود. در بخش ۵، نتایج عددی و مقایسه با روش چبیشف نوع اول و $RK۴$ ارائه می‌گردد. و در نهایت، در بخش ۶، نتیجه‌گیری بیان می‌شود.

۲ تعاریف

۱.۲ مشتق و انتگرال کسری آتانگانا-بالینو[1]

در سال ۲۰۱۶، آتانگانا و بالینو عملگر مشتق کسری زیر را ارائه دادند [۱۳]:

$$ {}^{ABC}_{\circ}D_t^{\nu}\varphi(t) = \frac{۱}{۱-\nu}\int_{\circ}^{t} E_{\nu}\Big(-\nu\frac{(t-\tau)^{\nu}}{۱-\nu}\Big)\varphi^{'}(\tau)d\tau, \qquad t>o, \quad \circ<\nu<۱. \tag{۱.۲} $$

که در آن E_{ν} تابع میتاگ-لفلر[2] یک پارامتری است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ E_{\nu}(Z) = \sum_{k=\circ}^{\infty}\frac{Z^k}{\Gamma(\nu k+۱)} = E_{\nu,۱}(Z), $$

و تعریف کلی‌تر آن (تابع میتاگ-لفلر دو پارامتری) عبارت است از:

$$ E_{\nu,\beta}(Z) = \sum_{k=\circ}^{\infty}\frac{Z^k}{\Gamma(\nu k+\beta)}. $$

در روابط فوق $\Gamma(z)$ تابع گاما هست که به‌صوت زیر تعریف می‌شود:

$$ \Gamma(z) = \int_{\circ}^{\infty} t^{z-۱}e^{-t}dt, \quad \mathcal{R}(Z)>\circ \tag{۲.۲} $$

[1] Atangana-Baleanu
[2] Mittag-Leffler

این تابع در تعریف توابع میتاگ-لفلر و بسیاری از عملگرهای کسری دیگر نقش اساسی دارد. شرط $\mathcal{R}(z) > 0$ برای همگرایی انتگرال ضروری است. انتگرال کسری مرتبط با این مشتق نیز به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$^{ABC}I_t^{\nu}\varphi(t) = \frac{1-\nu}{B(\nu)}\varphi(t) + \frac{\nu}{B(\nu)\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-\tau)^{\nu-1}\varphi(\tau)d\tau \tag{۳.۲}$$

که در آن $B(\nu)$ یک تابع نرمال‌ساز است که $B(0) = B(1) = 1$ را برآورده می‌کند. این تعریف تضمین می‌کند که وقتی $\nu \longrightarrow 0$ رابطه (۳.۲) به تابع اصلی و وقتی $v \longrightarrow 1$ به مشتق مرتبه اول معمولی، همگرا می‌شود.

۲.۲ چند جمله‌ای چبیشف نوع دوم

چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم که با $U_n(x)$ نشان داده می‌شوند، در بازه $[-1, 1]$ یک مجموعه چندجمله‌ای متعامد را تشکیل می‌دهند. این چندجمله‌ای‌ها را می‌توان به‌صورت بازگشتی و با استفاده از شرایط اولیه زیر تعریف کرد [۲۱]:

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, \\ U_1(x) &= 2x, \\ U_n(x) &= 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad n \geqslant 2. \end{aligned}$$

خاصیت تعامد: این چندجمله‌ای‌ها با توجه به تابع وزن $w(x) = \sqrt{1-x^2}$ متعامد هستند. به‌عبارت دیگر، حاصلضرب داخلی آن‌ها به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\int_{-1}^{1} U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{2}\delta_{mn}, \tag{۴.۲}$$

که در آن δ_{mn} نماد دلتای کرونکر است (یعنی $\delta_{mn} = 1$ اگر $m = n$ و در غیر این‌صورت صفر است).
یک ویژگی بسیار مهم و کاربردی این چندجمله‌ای‌ها در روش‌های عددی، رابطه‌ای است که انتگرال آن‌ها را به‌سادگی بیان می‌کند. این رابطه که مبنای بسیاری از محاسبات در این مقاله خواهد بود، به‌صورت زیر است:

$$\int U_n(x)dx = \frac{1}{2(n+1)}(U_{n+1}(x) - U_{n-1}(x)) + C, \quad n \geqslant 1. \tag{۵.۲}$$

این رابطه انتگرال را می‌توان با استفاده از فرم مثلثاتی چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم، $U_n(cos(\theta)) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin(\theta)}$، و با انجام یک تغییر متغیر ساده اثبات کرد [۲۱].

۳ مدل دینامیکی سیستم معادلات جفت شده بیماری کرونا

مدل دینامیکی سیستم معادلات جفت شده بیماری کرونا مورد مطالعه در این مقاله، جمعیت آلوده را به دو گروه، گروه دارای علائم بیماری $(\varphi(t))$ و گروه بدون علائم بیماری $(\omega(t))$ تقسیم می‌کند [۲۰]:

$$\begin{cases} D^{\nu}\varphi(t) &= A_1(t)\varphi(t) + A(t)\omega(t), \\ D^{\nu}\omega(t) &= B_1(t)\varphi(t) + B(t)\omega(t). \end{cases} \tag{۱.۳}$$

و شرایط اولیه:

$$\varphi(0) = \varphi_0, \omega(0) = \omega_0$$

متغیرها و پارامترهای این مدل و مقادیر عددی آن‌ها در جدول ۱ به‌طور شفاف ارائه شده‌اند. این مقادیر بر اساس مقیاس‌بندی و برازش اولیه با داده‌های اپیدمیولوژیک اولیه انتخاب شده‌اند [۲۰] تا رفتار کیفی واقعی بیماری را شبیه‌سازی کنند.

جدول ۱: پارامترهای مدل ریاضی بیماری کرونا

نماد	توضیح	عددی مقدار
$\varphi(t)$	جمعیت افراد آلوده دارای علائم	$\varphi_۰ = ۰/۸$
$\omega(t)$	جمعیت افراد آلوده بدون علائم	$\omega_۰ = ۰/۲$
$A_۱$	نرخ خروج از گروه دارای علائم (بهبودی/قرنطینه)	$-۰/۵$
A	نرخ انتقال از گروه بدون علائم به دارای علائم	$۰/۳$
$B_۱$	نرخ انتقال از گروه دارای علائم به بدون علائم	$-۰/۲$
B	نرخ خروج از گروه بدون علائم (بهبودی/ قرنطینه)	$-۰/۴$
ν	مرتبه کسری مشتق	$۰/۵, ۰/۸, ۱/۰$

۴ حل سیستم معادلات دیفرانسیل کسری جفت شده بیماری کرونا

در این بخش، به حل عددی سیستم معادلات دیفرانسیل جفت شده (۱.۳) مربوط به بیماری کرونا می‌پردازیم. روش پیشنهادی مبتنی بر بسط سری چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم است. ما جواب‌های $\varphi(t)$ و $\omega(t)$ را به دو صورت زیر بیان می‌کنیم [۲۰]:
حالت اول: بسط جواب سیستم بر اساس چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم با ضرایب ثابت

$$\varphi(t) = \sum_{n=۰}^{\infty} \alpha_n U_n(t), \quad \omega(t) = \sum_{n=۰}^{\infty} \beta_n U_n(t) \tag{۱.۴}$$

که در آن $U_n(t)$ چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم است. این چندجمله‌ای‌ها در بازه $[-۱, ۱]$ تعریف می‌شوند و از رابطه بازگشتی زیر پیروی می‌کنند:

$$\begin{aligned} &U_۰(t) = ۱, \\ &U_۱(t) = ۲t, \\ &U_n(t) = ۲tU_{n-۱}(t) - U_{n-۲}(t); \quad -۱ \leqslant t \leqslant ۱, \quad n \geqslant ۲. \end{aligned}$$

این چندجمله‌ای‌ها یک مجموعه متعامد را روی بازه $[-۱, ۱]$ با تابع وزن $\sqrt{۱ - t^۲}$ تشکیل می‌دهند.
برای حل عددی، از روش کولوکیشن استفاده می‌کنیم. نقاط کولوکیشن t_s برای $s = ۰, ۱, ..., N$ به‌صورت زیر انتخاب می‌شوند

$$t_s = \cos \frac{(۲s + ۱)\pi}{۲(N + ۱)}.$$

این نقاط، ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم $U_{N+۱}(t)$ هستند و به دلیل خواص متعامد بودن، برای تقریب‌های عددی، مناسب می‌باشند.
برای حل معادله دیفرانسیل کسری، نیاز به محاسبه انتگرال داریم. رابطه بین چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول $T_n(t)$ و نوع دوم $U_n(t)$ به‌صورت زیر است:

$$T'_{n+۱}(t) = (n + ۱)U_n(t) \tag{۲.۴}$$

از این رابطه، می‌توان انتگرال $U_n(t)$ را به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$\int U_n(t)dt = \frac{۱}{(n + ۱)} T_{n+۱}(t) \tag{۳.۴}$$

که در آن $T_{n+1}(t)$ چندجمله‌ای چبیشف نوع اول است.
این رابطه از انتگرال‌گیری مستقیم از دو طرف رابطه (۲.۴) به‌دست می‌آید. از آنجا که مشتق $T_{n+1}(t)$ برابر با $(n+1)U_n(t)$ است، انتگرال $U_n(t)$ باید برابر با $\frac{1}{n+1}T_{n+1}$ به‌علاوه یک ثابت انتگرال باشد.
همچنین، چندجمله‌ای چبیشف نوع اول $T_{n+1}(t)$ را می‌توان بر حسب چندجمله‌ای‌های نوع دوم بیان کرد

$$T_{n+1}(t) = \frac{1}{2}(U_{n+1}(t) - U_{n-1}(t)) \tag{۴.۴}$$

این رابطه مبتنی بر ارتباط مثلثاتی بین چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول و دوم است. با استفاده از تعاریف مثلثاتی این چندجمله‌ای‌ها، می‌توان این رابطه را اثبات کرد. با ترکیب روابط (۳.۴) و (۴.۴)، فرمول انتگرال‌گیری برای $U_n(t)$ به‌دست می‌آید:

$$\int U_n(t)dt = \frac{1}{2(n+1)}(U_{n+1}(t) - U_{n-1}(t)), \quad n > 0 \tag{۵.۴}$$

این رابطه کلیدی به ما امکان می‌دهد انتگرال توابعی را که به‌صورت بسط چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم بیان شده‌اند به‌راحتی محاسبه کنیم.
سیستم معادلات دیفرانسیل جفت شده (۱.۳) را در نظر بگیرید. این سیستم شامل عملگر مشتق کسری است. با استفاده از تعریف انتگرال کسری آتانگانا-بالینو و تقریب مناسب، می‌توان جواب سیستم را به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}((\varphi(t),\omega(t)) = \Big((1-\nu)(\varphi(t)+\omega(t)) + \frac{\nu}{\Gamma(v)}\int_0^t (\varphi(\tau)+\omega(\tau))(t-\tau)^{\nu-1}d\tau,\\ (1-\nu)(\varphi(t)+\omega(t)) + \frac{\nu}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (\varphi(t)+\omega(\tau))(t-\tau)^{\nu-1}d\tau\Big)\end{aligned}$$

برای ساده‌سازی انتگرال کسری، از تقریب زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^t (\varphi(\tau)+\omega(\tau))(t-\tau)^{\nu-1}d\tau \approx 2^{\nu-1}\int_0^t (\varphi(\tau)+\omega(\tau))d\tau$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(\varphi(t),\omega(t)) = 2^{\nu-1}\Big((1-\nu)(\varphi(t)+\omega(t)) + \frac{\nu}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (\varphi(\tau)+\omega(\tau))d\tau,\\ (1-\nu)(\varphi(t)+\omega(t)) + \frac{\nu}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (\varphi(t)+\omega(\tau))d\tau\Big).\end{aligned} \tag{۶.۴}$$

اکنون، با جایگذاری بسط‌های $\varphi(t)$ و $\omega(t)$ از رابطه (۱.۴) و استفاده از فرمول انتگرال‌گیری $U_n(t)$ از رابطه (۵.۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= 2^{\nu-1}\Big((1-\nu)(\varphi(t)+\omega(t)) + \frac{\nu}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (\varphi(\tau)+w(\tau))d\tau\Big)\\ &= 2^{\nu-1}\Big((1-\nu)(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n U_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n U_n(t))\\ &+ \frac{\nu}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n U_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n U_n(t)d\tau\Big)\\ &= 2^{\nu-1}\Big((1-\nu)(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n U_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n U_n(t))\\ &+ \frac{\nu}{\Gamma(\nu)}(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\int_0^t U_n(\tau)d\tau + \sum_{n=0}^{\infty}\beta_n\int_0^t U_n(\tau)d\tau)\Big)\end{aligned}$$

$$\approx ۲^{\nu-۱}\Big((۱-\nu)(\sum_{n=۰}^{\infty}\alpha_n U_n(t)+\sum_{n=۰}^{\infty}\beta_n U_n(t))\Big)+\frac{\nu}{۲^{۲-\nu}\Gamma(\nu)}\sum_{n=۲}^{\infty}\alpha_n\Big(\frac{U_{n+۱}(t)-U_{n-۱}(t)}{(n+۱)}\Big)$$
$$+\frac{\nu}{۲^{۲-\nu}\Gamma(\nu)}\sum_{n=۲}^{\infty}\beta_n\Big(\frac{U_{n+۱}(t)-U_{n-۱}(t)}{(n+۱)}\Big). \tag{۷.۴}$$

با تقارن و برای ساده‌سازی، فرض می‌کنیم $\varphi(t)=\omega(t)$، در نتیجه $\alpha_n=U_n$. بنابراین معادله فوق به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\varphi(t)=\omega(t)\approx ۲^{\nu}(۱-\nu)\Big(\sum_{n=۰}^{\infty}\alpha_n U_n(t)\Big)+\frac{\nu}{۲^{۱-\nu}\Gamma(\nu)}\sum_{n=۲}^{\infty}\alpha_N\Big(\frac{U_{n+۱}(t)-U_{n-۱}(t)}{n+۱}\Big). \tag{۸.۴}$$

این رابطه با جایگذاری $\alpha_n=\beta_n$ و ساده‌سازی جبری به‌دست می‌آید. ضرایب ۲^{ν} و $۲^{۱-\nu}$ حاصل از جمع کردن دو سری یکسان و ساده سازی ضرایب هستند.
با فرض $t\leqslant t^{\nu}<T^{\nu}\leqslant \nu\leqslant ۱$ (براساس قضیه ۳.۴ از مرجع [۲۰])، رفتار مجانبی چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم به‌صورت زیر است:

$$(U_{n+۱}(t)-U_{n-۱}(t))\sim ۱,\quad \forall\, n,t\longrightarrow ۱. \tag{۹.۴}$$

با استفاده از این رفتار مجانبی، شکل محدود رابطه (۸.۴) برای $t\longrightarrow ۱$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\varphi_N(t)=\omega_N(t)\approx ۲^{\nu}(۱-\nu)\Big(\sum_{n=۰}^{N}\alpha_n\Big)+\frac{\nu}{۲^{۱-\nu}\Gamma(\nu)}\sum_{n=۲}^{N}\alpha_N\Big(\frac{۱}{n+۱}\Big). \tag{۱۰.۴}$$

با در نظر گرفتن همگرایی توابع $\varphi(t)=\omega(t)$ که با $\frac{۱}{۱-t}$ برای $t\in(۰,۱)$ مقایسه می‌شوند، می‌توانیم کران‌های زیر را برای ضرایب استنتاج کنیم:

$$\begin{aligned}
\alpha_۱&\leqslant\frac{۱}{\Big(۲^{\nu}(۱-\nu)+\frac{\nu}{۲^{۱-\nu}\Gamma(\nu)}(\frac{۱}{۲})\Big)},\\
\alpha_۲&\leqslant\frac{۱}{\Big(۲^{\nu}(۱-\nu)+\frac{\nu}{۲^{۱-\nu}\Gamma(\nu)}(\frac{۱}{۳})\Big)},\\
\alpha_۳&\leqslant\frac{۱}{\Big(۲^{\nu}(۱-\nu)+\frac{\nu}{۲^{۱-\nu}\Gamma(\nu)}(\frac{۱}{۴})\Big)}\\
\alpha_۴&\leqslant\frac{۱}{\Big(۲^{\nu}(۱-\nu)+\frac{\nu}{۲^{۱-\nu}\Gamma(\nu)}(\frac{۱}{۵})\Big)}
\end{aligned} \tag{۱۱.۴}$$

برای مقادیر مختلف ν، مقادیر تقریبی ضرایب، به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&\nu=۰/۱\longrightarrow \alpha_۱=۱/۰۰۸,\quad \alpha_۲=۱/۰۱۷,\quad \alpha_۳=۱/۰۲۲,\quad \alpha_۴=۱/۰۲۵,\ldots,\\
&\nu=۰/۲۵\longrightarrow \alpha_۱=۱/۰۳۴,\quad \alpha_۲=۱/۰۶۲,\quad \alpha_۳=۱/۰۷۶,\quad \alpha_۴=۱/۰۸۵,\ldots,\\
&\nu=۰/۵\longrightarrow \alpha_۱=۱/۱۳۱,\quad \alpha_۲=۱/۲۱۲,\quad \alpha_۳=۱/۲۵۷,\quad \alpha_۴=۱/۲۸۵,\ldots,\\
&\nu=۰/۷۵\longrightarrow \alpha_۱=۱/۳۵۹,\quad \alpha_۲=۱/۵۸۵,\quad \alpha_۳=۱/۷۲۹,\quad \alpha_۴=۱/۸۲۹,\ldots,\\
&\nu=۰/۹\longrightarrow \alpha_۱=۱/۱۸۶,\quad \alpha_۲=۱/۸۳۹,\quad \alpha_۳=۱/۱۶۷,\quad \alpha_۴=۱/۸۲۰,\ldots,\\
&\nu=۱\longrightarrow \alpha_۱=۲,\alpha_۲=۳,\alpha_۳=۴,\alpha_۴=۵,\ldots,
\end{aligned} \tag{۱۲.۴}$$

با استفاده از ضرایب محاسبه شده، جواب‌های تقریبی به‌ترتیب زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \alpha_1 U_1(t) \approx \frac{2t}{\Big(2^{\nu}(1-\nu)+\frac{\nu}{2^{1-\nu}\Gamma(\nu)}(\frac{1}{2})\Big)},\\
\varphi_2(t) &= \alpha_1 U_1(t)+\alpha_2 U_2(t) \approx \frac{2t}{\Big(2^{\nu}(1-\nu)+\frac{\nu}{2^{1-\nu}\Gamma(\nu)}(\frac{1}{2})\Big)}+\frac{4t^2-1}{\Big(2^{\nu}(1-\nu)+\frac{\nu}{2^{1-\nu}\Gamma(\nu)}(\frac{1}{3})\Big)}\\
\varphi_3(t) &= \alpha_1+T_1(t)+\alpha_2 T_2(t)+\alpha_3 T_3(t) \approx \frac{2t}{\Big(2^{\nu}(1-\nu)+\frac{\nu}{2^{1-\nu}\Gamma(\nu)}(\frac{1}{2})\Big)}\\
&\quad+\frac{4t^2-1}{\Big(2^{\nu}(1-\nu)+\frac{\nu}{2^{1-\nu}\Gamma(\nu)}(\frac{1}{3})\Big)}+\frac{8t^3-4t}{\Big(2^{\nu}(1-\nu)+\frac{\nu}{2^{1-\nu}\Gamma(\nu)}(\frac{1}{4})\Big)}\\
\varphi_4(t) &= \alpha_1+T_1(t)+\alpha_2 T_2(t)+\alpha_3 T_3(t) \approx \frac{2t}{\Big(2^{\nu}(1-\nu)+\frac{\nu}{2^{1-\nu}\Gamma(\nu)}(\frac{1}{2})\Big)}\\
&\quad+\frac{4t^2-1}{\Big(2^{\nu}(1-\nu)+\frac{\nu}{2^{1-\nu}\Gamma(\nu)}(\frac{1}{3})\Big)}+\frac{8t^3-4t}{\Big(2^{\nu}(1-\nu)+\frac{\nu}{2^{1-\nu}\Gamma(\nu)}(\frac{1}{4})\Big)}\\
&\quad+\frac{16t^4-12t^2+1}{\Big(2^{\nu}(1-\nu)+\frac{\nu}{2^{1-\nu}\Gamma(\nu)}(\frac{1}{5})\Big)}
\end{aligned} \tag{۱۳.۴}$$

حالت دوم: بسط جواب سیستم براساس چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم با ضرایب وابسته به زمان
اگر جواب سیستم (۱.۳) به‌صورت زیر باشد:

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(t)U_n(t),\quad \omega(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(t)U_n(t). \tag{۱۴.۴}$$

حل تقریبی را می‌توان در قالب قضیه زیر ارائه داد:

قضیه ۱.۴. سیستم (۱.۳) را با ضرایب غیرثابت مناسب $B_1(t)$، $B(t)$ و $A_1(t)$، $A(t)$ در نظر بگیرید به‌طوری‌که $\delta(t):=\max\{A(t),A_1(t),B(t),B_1(t)\}$. جواب تقریبی سیستم (۱.۳) به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
(\varphi(t),\omega(t)) \approx \Big(&\sum_{n=0}^{\infty}\delta_{\nu,n}\Big(1+\frac{(-2)\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{C_n\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+1-n)\Gamma(\nu+1+n)}\Big)U_n(t),\\
&\sum_{n=0}^{\infty}\delta_{\nu,n}\Big(1+\frac{(-2)\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{C_n\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+1-n)\Gamma(\nu+1+n)}\Big)U_n(t)\Big)
\end{aligned} \tag{۱۵.۴}$$

که در آن $\delta_{n,v}$ ضرایب ثابت هستند.

اثبات. با در نظر گرفتن معادله سیستم و استفاده از تعریف انتگرال کسری، داریم:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &\approx \delta(t)(1-v)(\varphi(t)+\omega(t)) + \frac{v}{\Gamma(v)}\int_0^t \delta(\tau)(\varphi(\tau)+\omega(t))(t-\tau)^{v-1}d\tau \\ &\approx \mu_v(f(t) + \frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^1 f(\tau)(t-\tau)^{v-1}d\tau) \\ &= \mu_v(f(t)+I^v f(t)), \quad v>0,\ t>0 \end{aligned} \tag{۱۶.۴}$$

که در آن $\mu_v = \max(v, 1-v)$ و $f(t) = \delta(t)(\varphi(t)+\omega(t))$. حال فرض کنید که

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(t) U_n(t).$$

که در آن [؟]

$$\delta_n(t) \approx \frac{1}{h_n}\int_0^1 f(t)U_n(t)\gamma(t)dt = \frac{2}{C_n\pi}\int_0^1 f(t)U_n(t)\frac{1}{\sqrt{t-t^2}}dt \approx \frac{2}{\pi}\int_0^1 f(t)dt = \delta_n, \quad \forall n \tag{۱۷.۴}$$

با در نظر گرفتن پارامترهای $t < U^v < v < 1$ (براساس قضیه ۳.۴ مرجع [۲۰]) و $c_n = 1$ (به‌جز $c_0 = 2$) و $U_n \sim 1$.
با ادامه محاسبات:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &\approx \delta(t)(1-v)(\varphi(t)+\omega(t) + \frac{v}{\Gamma(v)}\int_0^t \delta(\tau)(\varphi(\tau)+\omega(t))(t-\tau)^{v-1}d\tau \\ &\approx \mu_v(f(t) + \frac{1}{\Gamma(v)}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{v-1}d\tau) \\ &= \mu_v(f(t)+I^v f(t)), \quad v>0, \quad t>0 \\ &= \mu_v\Big(\sum_0^{\infty}\delta_n U_n(t) + \sum_{n=0}^{\infty}\delta_n \frac{(-2)\Gamma(v+\frac{1}{2})}{C_n\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(v+1-n)\Gamma(v+1+n)}U_n(t)\Big) \\ &= \mu_v\sum_0^{\infty}\delta_n U_n(t)\Big(1+\frac{(-2)\Gamma(v+\frac{1}{2})}{C_n\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(v+1-n)\Gamma(v+1+n)}\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\delta_{v,n}\Big(1+\frac{(-2)\Gamma(v+\frac{1}{2})}{C_n\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(v+1-n)\Gamma(v+1+n)}\Big)U_n(t) \end{aligned} \tag{۱۸.۴}$$

که در آن

$$\delta_{v,n} \approx \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{اگر } v \geqslant 1/2 \\ \frac{2}{\pi} & \text{اگر } v < 1/2 \end{cases}$$

واضح است که $\left|\frac{(-2)\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{C_n\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+1-n)\Gamma(\nu+1+n)}\right| < 1$ برای همه $n \geqslant 2$ و $v \in [0,1]$ با استفاده از رابطه

(۱۸.۴)، جواب‌های تقریبی برای چند جمله اول به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(t) \approx \frac{2}{\pi}U_0(t) = \frac{2}{\pi}, \qquad v \geqslant 0/5, \\
&\varphi_0(t) \approx \frac{4}{\pi}, \qquad v < 0/5, \\
&\varphi_1(t) \approx \frac{2}{\pi}(U_0(t) + U_1(t)) = \frac{2}{\pi}(1 + 2t), \quad v \geqslant 0/5, \\
&\varphi_1(t) \approx \frac{4}{\pi}(1 + 2t), \qquad v < 0/5, \\
&\varphi_2(t) \approx \frac{2}{\pi}(U_0(t) + U_1(t) + U_2(t)) = \frac{2}{\pi}(2t + 4t^2), \quad v \geqslant 0/5, \\
&\varphi_2(t) \approx \frac{4}{\pi}(2t + 4t^2), \qquad v < 0/5, \\
&\quad \vdots
\end{aligned} \tag{19.4}$$

و تمامی اعمال به‌طور مشابه برای $\omega(t)$ قابل انجام است. □

۱.۴ فرضیات اصلی

۱. مدل در یک بازه زمانی نرمال شده $t \in [0, 1]$ در نظر گرفته شده است.

۲. پارامترهای مدل A, A_1, B, B_1 در این شبیه‌سازی ثابت فرض شده‌اند.

۳. توابع $\varphi(t)$ و $\omega(t)$ به اندازه کافی هموار هستند تا توسط یک چندجمله‌ای درجه N تقریب زده شوند.

۲.۴ گام‌های الگوریتم حل

برای شفافیت و قابلیت تکرارپذیری، روند حل نظری ارائه شده در «حالت اول» در قالب یک الگوریتم سیستماتیک ارائه می‌شود.
ورودی: مرتبه کسری ν، پارامترهای مدل (جدول ۱)، شرایط اولیه φ_0, ω_0، درجه تقریب N، بازه زمانی نهایی T.
خروجی: ضرایب بسط $\{\alpha_n\}_{n=0}^{N}$ و $\{\beta_n\}_{n=0}^{N}$ و جواب‌های تقریبی $\varphi_N(t)$ و $\omega_N(t)$.
گام اول. تبدیل بازه:
بازه زمانی $[0, T]$ به بازه استاندارد چبیشف $[-1, 1]$ با استفاده از تبدیل خطی $x = \frac{2t}{T} - 1$ نگاشت می‌شود.
گام دوم. بسط توابع:
برای حل تقریبی سیستم، توابع مجهول $\varphi(t)$ و $\omega(t)$ را بر حسب چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم $U_n(t)$ روی بازه $[-1, 1]$ بسط می‌دهیم:

$$\varphi(t) \approx \varphi_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n U_n(x(t)),$$
$$\omega(t) \approx \omega_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \beta_n U_n(x(t)).$$

گام سوم. اعمال عملگر کسری
در این گام، عملگر مشتق کسری آتانگانا–بالینو (ABC) با استفاده از روابط (۱.۲) و (۳.۲) و رابطه انتگرال (۵.۴) اعمال می‌شود. برای محاسبه $D^\nu\varphi(t)$ و $D^\nu\omega(t)$ از تعریف عملگر انتگرال ABC استفاده می‌کنیم. با جایگذاری بسط چبیشف $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n U_n(x(t))$ در تعریف عملگر ABC، رابطه به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$D^\nu\varphi(t) = \frac{1}{1-\nu}\int_0^t E_\nu\Big(-\nu\frac{(t-\tau)^\nu}{1-\nu}\Big)\frac{d}{d\tau}\Big[\sum_{n=0}^{N}\alpha_n U_n(x(\tau))\Big]d\tau$$

سپس از رابطه مشتق چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم استفاده می‌شود:

$$\frac{d}{dx}U_n(x) = \frac{(n+1)T_{n+1}(x) - xU_n(x)}{x^2 - 1}$$

که در آن $T_{n+1}(x)$ چندجمله‌ای چبیشف نوع اول است. همچنین با بهره‌گیری از رابطه انتگرال چبیشف نوع دوم:

$$\int U_n(x)dx = \frac{1}{2(n+1)}(U_{n+1}(x) - U_{n-1}(x)) \quad \text{برای} \quad n \geqslant 1$$

و با در نظر گرفتن تابع میتاگ–لفلر در انتگرال، عملگر مشتق کسری به‌صورت یک ترکیب خطی از چندجمله‌ای‌های چبیشف بازنویسی می‌شود. در نهایت، پس از اعمال عملگر کسری، هر یک از عبارات $D^\nu\varphi(t)$ و $D^\nu\omega(t)$ به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$D^\nu\varphi(t) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n^{(\nu)} U_n(x(t))$$
$$D^\nu\omega(t) = \sum_{n=0}^{N} \beta_n^{(\nu)} U_n(x(t))$$

که در آن $\alpha_n^{(\nu)}$ و $\beta_n^{(\nu)}$ ضرایب جدیدی هستند که از اثر عملگر کسری بر ضرایب اصلی حاصل می‌شوند.
این تبدیل امکان جایگذاری مستقیم مشتقات کسری در سیستم معادلات جفت شده را فراهم می‌سازد و مبنای ریاضی لازم برای انجام گام چهارم را ایجاد می‌کند.
گام چهارم. جایگذاری در معادله:
بسط‌های $D^\nu\varphi$ و φ و $D^\nu\omega$ و ω در سیستم معادلات (۱.۳) جایگذاری می‌شوند.
گام پنجم. تصویر کردن در فضای چندجمله‌ای:
هدف این گام، تبدیل سیستم معادلات دیفرانسیل به یک سیستم جبری خطی که بتوان آن را با رایانه حل کرد.
پس از جایگذاری بسط‌های چبیشف در معادلات اصلی (گام چهارم)، معادله‌ای به‌صورت زیر ایجاد می‌گردد:

$$[D^\nu\varphi(t)] = [A1(t)\varphi(t) + A(t)\omega(t)]$$

که در آن هرکدام از این اجزا (مثلاً $\varphi(t)$ خود یک سری مانند $\sum \alpha_n U_n(t)$ هستند. این معادله برای تمام نقاط t برقرار است پس بی‌نهایت معادله داریم. ما به جای اینکه بخواهیم این معادله را برای هر t جداگانه حل کنیم، آن را به فضای چندجمله‌ای‌های چبیشف «تصویر» می‌کنیم. این کار با استفاده از خاصیت تعامد انجام می‌شود. بدین منظور، معادله را در هر یک از چندجمله‌ای‌های پایه $(U_m(x))$ ضرب کرده و حاصل را در بازه $[-1, 1]$ با تابع وزن $\sqrt{1-x^2}$ انتگرال می‌گیریم (این کار برای هر m از ۰ از N انجام شود). این عمل یک سیستم جبری خطی $(2N+2) \times (2N+2)$ برای ضرایب مجهول β_n, α_n ایجاد می‌کند.
از خاصیت تعامد (۵.۲)) برای تولید یک سیستم معادلات جبری خطی برای ضرایب مجهول α_n و β_n استفاده می‌کنیم. بنابراین اگر $m \neq n$ آن‌گاه

$$\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)\sqrt{(1-x^2)}dx = 0$$

و اگر $m = n$ آن‌گاه

$$\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)\sqrt{(1-x^2)}dx = \pi/2$$

و این یعنی وقتی حاصل ضرب را انتگرال می‌گیرید، تمام جمله‌هایی که در آن‌ها $n \neq m$ است، صفر می‌شوند. فقط جمله‌هایی باقی می‌مانند که در آن‌ها $n = m$ است. پس از انجام این کار برای یک m مشخص به یک معادله جبری می‌رسیم. این معادله فقط شامل معادلات α_n و β_n است (تمام tها حذف شده‌اند). وقتی این کار را برای همه mها از ۰ تا N انجام می‌دهیم، برای $\varphi(t)$، $N+1$ معادله و همچنین برای $\omega(t)$، $N+1$ معادله خواهیم داشت که در مجموع $2N+2$ معادله و $2N+2$ مجهول $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_N, \beta, \beta_1, ..., \beta_N)$ داریم. بنابراین خروجی این گام یک سیستم ماتریسی است:

$$[M] \times [\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_N, \beta, \beta_1, ..., \beta_N]^T = [b]$$

که در آن $[M]$ یک ماتریس $(۲N+۲)\times(۲N+۲)$ است، بردار سمت راست $[b]$ از شرایط مسئله تشکیل شده است. بنابراین، گام پنجم باعث می‌شود که یک مسئله دیفرانسیل پیچیده به یک مسئله جبری خطی ساده تبدیل گردد، با افزایش N، خطا به‌طور نمایی کاهش می‌یابد.

گام ششم. اعمال شرایط اولیه:

در این گام، شرایط اولیه مسئله به سیستم معادلات اضافه می‌شود تا جواب یکتا و فیزیکی به‌دست آید. این مرحله از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است زیرا سیستم جبری خطی حاصل از گام پنجم دارای بی‌نهایت جواب است، برای بدست آوردن جواب یکتا، نیاز به اعمال شرایط اولیه داریم و شرایط اولیه اطلاعات فیزیکی مسئله را وارد سیستم می‌کند.

شرایط اولیه $\varphi(۰)=\varphi_۰$ و $\omega(۰)=\omega_۰$ به‌صورت زیر اعمال می‌شوند:

$$\varphi(۰)=\sum_{n=۰}^{N}\alpha_n U_n(x(۰))=\varphi_۰$$
$$\omega(۰)=\sum_{n=۰}^{N}\beta_n U_n(x(۰))=\omega_۰$$

با توجه به مقادیر چندجمله‌ای‌های چبیشف در نقطه $x(۰)=-۱$ (نقطه متناظر با $t=۰$):

$$U_n(-۱)=(-۱)^n(n+۱)$$

پس معادلات شرایط اولیه به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\sum_{n=۰}^{N}(-۱)^n(n+۱)\alpha_n=\varphi_۰$$
$$\sum_{n=۰}^{N}(-۱)^n(n+۱)\beta_n=\omega_۰$$

این دو معادله به‌عنوان معادلات اضافی به سیستم $(۲N+۲)\times(۲N+۲)$ حاصل از گام پنجم اضافه می‌شوند. در عمل دو سطر جدید به ماتریس سیستم اضافه می‌شود، دو مؤلفه جدید به بردار سمت راست اضافه می‌شود و سیستم نهایی به ابعاد $(۲N+۴)\times(۲N+۲)$ تبدیل می‌شود.

پس از این گام، سیستم معادلات یک جواب یکتا دارد، جواب بدست آمده شرایط اولیه فیزیکی مسئله را ارضا می‌کند و سیستم آماده حل با روش‌های عددی استاندارد است.

این گام تضمین می‌کند که جواب سیستم نه تنها از نظر ریاضی صحیح، بلکه از نظر فیزیکی نیز معقول و قابل قبول باشد.

گام هفتم. حل سیستم:

در این گام، سیستم جبری خطی نهایی که از ترکیب معادلات حاصل از تصویرسازی و شرایط اولیه تشکیل شده است، حل می‌شود. جزئیات این فرآیند به شرح زیر است:

سیستم نهایی به شکل ماتریسی زیر است:

$$M\cdot X=b$$

که در آن M یک ماتریس $(۲N+۲)\times(۲N+۲)$ است، $X=[\alpha_۰,\alpha_۱,...,\alpha_N,\beta,\beta_۱,....,\beta_N]^T$ بردار مجهولات است، b بردار سمت راست معادلات است. سیستم جبری خطی حاصل با استفاده از روش‌های عددی استاندارد مانند حذف گاوس برای به‌دست آوردن مقادیر ضرایب β_n و α_n حل می‌شود. از روش حذف گاوسی به این دلیل استفاده می‌شود که برای سیستم‌های با ابعاد متوسط $(N\leqslant ۲۰)$ پایدار است، خطای گردش قابل کنترل دارد و برای ابعاد مورد نظر در این مسئله بهینه است. این روش در دو مرحله اصلی انجام می‌پذیرد: مرحله اول حذف پیشرو که در آن ماتریس M به ماتریس بالامثلثی تبدیل می‌شود، و مرحله دوم جایگزینی عقبگرد که در آن مقادیر مجهولات به ترتیب از آخرین معادله به سمت اول محاسبه می‌شوند. خروجی این گام مقادیر عددی تمام ضرایب α_n و β_n است که برای ساخت جواب نهایی در گام بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

گام هشتم. ساخت جواب نهایی:

ضرایب به‌دست آمده در بسط‌های گام دوم جایگذاری شده و جواب‌های تقریبی نهایی $\varphi_N(t)$ و $\omega_N(t)$ حاصل می‌شوند.

در این گام، با استفاده از ضرایب به‌دست آمده از حل سیستم جبری خطی در گام قبلی، جواب‌های تقریبی نهایی ساخته می‌شوند. ضرایب

محاسبه شده α_n و β_n مستقیماً در بسط‌های چبیشف جایگذاری می‌شوند:

$$\varphi_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n U_n(x(t)) \tag{۲۰.۴}$$

$$\omega_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \beta_n U_n(x(t)) \tag{۲۱.۴}$$

که در این روابط، $x(t) = \frac{2t}{T} - 1$ تبدیل خطی از بازه $[0, T]$ به بازه استاندارد $[-1, 1]$ است. این جواب‌های تقریبی دارای دقت نمایی هستند، به این معنی که با افزایش درجه تقریب N، خطا به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد. از مزایای مهم این روش، ارائه یک توصیف تحلیلی از جواب است که امکان محاسبه مقدار توابع در هر نقطه دلخواه از دامنه بدون نیاز به انجام مجدد محاسبات عددی پیچیده را فراهم می‌سازد. در نهایت، این جواب‌ها برای تحلیل‌های بعدی، رسم نمودارها و مقایسه با روش‌های دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۵ نتایج عددی و مقایسه

در این بخش، کارایی روش پیشنهادی را با حل مدل (۱.۳) برای مقادیر مختلف پارامترها و شرایط اولیه بررسی می‌کنیم. برای شبیه‌سازی، مقادیر $A_1 = -0.5, A = 0.3, B_1 = 0.2, B = -0.4$ و شرایط اولیه $\varphi(0) = 0.8, \omega(0) = 0.2$ و $\nu = 0.8$ در نظر گرفته شده است. تمامی شبیه‌سازی‌ها در نرم‌افزار $MATLABR2021a$ و با استفاده از مقادیر پارامترهای جدول ۱ انجام شده‌اند.

۱.۵ همگرایی و تحلیل خطا

برای سنجش دقت، جواب روش پیشنهادی (چبیشف نوع دوم) با جواب مرجع تولیدشده توسط روش رانگ–کوتای مرتبه چهار (RK4) با گام زمانی بسیار کوچک $(h = 10^{-5})$ مقایسه شده است. معیارهای خطای مربعات میانگین (MSE) و میانگین خطای مطلق (MAE) محاسبه شدند:

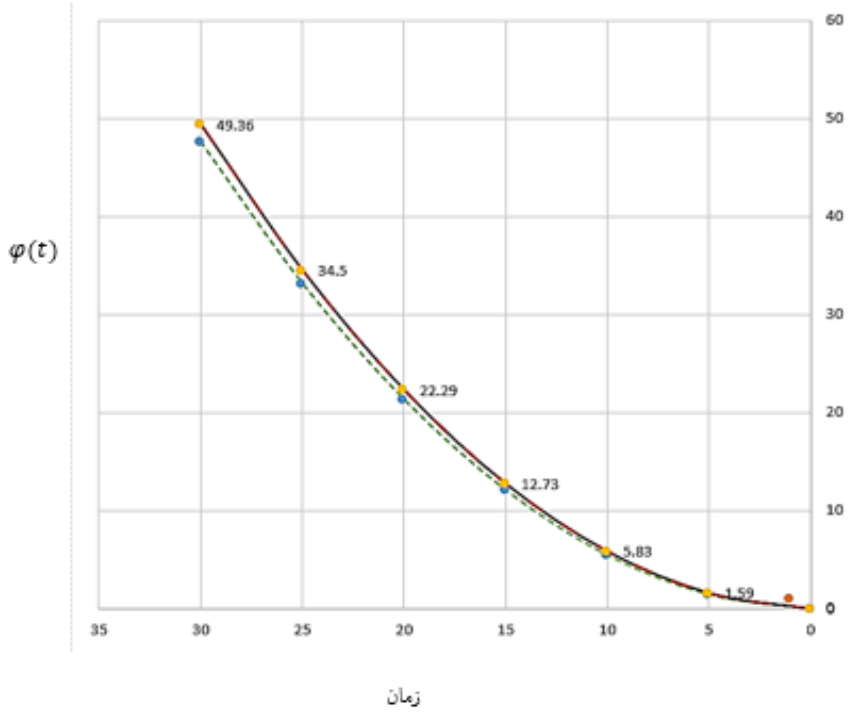
$$MSE = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} (\varphi_{ref}(t_i) - \varphi_N(t_i))^2, \tag{۱.۵}$$

$$MAE = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} |\varphi_{ref}(t_i) - \varphi_N(t_i)|. \tag{۲.۵}$$

جدول ۲: مقایسه خطای MSE برای تابع $\varphi(t)$، زمانی‌که $(\nu = 0.8)$

روش RK4	چبیشف نوع دوم (پیشنهادی)	چبیشف نوع اول	درجه تقریب (N)
–	5.92×10^{-4}	2.14×10^{-3}	۳
–	4.15×10^{-4}	1.87×10^{-3}	۴
–	2.01×10^{-4}	1.23×10^{-3}	۵
8.50×10^{-7}	–	–	جواب مرجع

همان‌طور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود، روش چبیشف نوع دوم در تمامی درجات تقریب، خطای کمتری نسبت به نوع اول دارد. همچنین، با افزایش N، خطا در هر دو روش کاهش می‌یابد که نشان‌دهنده همگرایی عددی روش‌ها است، اما نرخ کاهش خطا (همگرایی) در روش پیشنهادی سریع‌تر است.

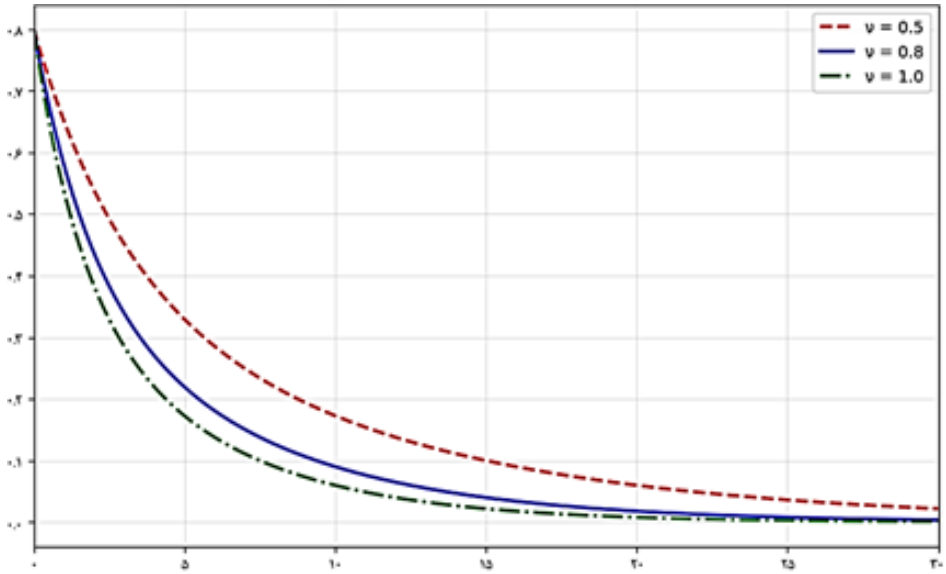


شکل ۱: مقایسه جواب‌های تقریبی استفاده ازچندجمله‌ای چبیشف نوع اول و دوم با روش RK4 برای $\varphi(t)$ با $N = ۴$ و $\nu = ۰/۸$.

در شکل ۱، نمودار سه منحنی نمایش داده شده است: منحنی مرجع (خط مشکی) حاصل از RK4، منحنی چبیشف نوع اول (خط سبز نقطه‌چین)، منحنی چبیشف نوع دوم (خط قرمز نقطه‌چین).
همان‌طور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، روش مبتنی بر چبیشف نوع دوم (خط قرمز) همگرایی سریع‌تر و دقت بالاتری نسبت به روش چبیشف نوع اول (خط سبز) از خود نشان می‌دهد (منحنی قرمز به منحنی مشکی نزدیک‌تر است). این برتری به ویژه برای مقادیر کوچک N مشهود است.
جواب تقریبی (۱۹.۴) در مورد اسپانیا و ایتالیا با استفاده از روش پیشنهادی ما، برای ضرایب ثابت $C_{۰/۵,۲} = ٪۹۵۷$ و $C_{۰/۷۵,۲} = ٪۰۴۷۱$ عبارت است از $(\varphi_۲, \omega_۲) = \left(\frac{۲(۲t + ۴t^۲)}{\pi}, \frac{۲(۲t + ۴t^۲)}{\pi}\right)$ به‌طوری‌که با استفاه از چندجمله‌ای چبیشف نوع اول جواب تقریبی (۱۹.۴) به‌صورت $(\varphi_۲, \psi_۲) = \left(\frac{۲(t + t^۲)}{\pi}, \frac{۲(t + t^۲)}{\pi}\right)$ است. در مورد کشور چین استفاده از روش پیشنهادی ما، جواب تقریبی به‌صورت $(\varphi_۲, \omega_۲) = \left(\frac{۲}{\pi}(۱ + ۲t), \frac{۲}{\pi}(۱ + ۲t)\right)$ را با حداکثر مقدار $C_{۰/۵,۱} = ۱$ نشان می‌دهد به‌طوری‌که در [۲۰]، $(\varphi_۱, \psi_۱) = \left(\frac{۲}{\pi}(۱ + t), \frac{۲}{\pi}(۱ + t)\right)$ می‌شود.

۲.۵ تحلیل حساسیت به مرتبه کسری (ν)

برای بررسی تأثیر حافظه سیستم، مدل برای مقادیر مختلف ν شبیه‌سازی شد. شکل ۲ نشان می‌دهد که با کاهش ν (یعنی قوی‌تر شدن اثر حافظه)، سیر زمانی عفونت کندتر می‌شود و به اوج کمتری می‌رسد. این یافته از نظر اپیدمیولوژیک منطقی است، زیرا اثرات غیرمحلی و تاریخچه‌ای می‌توانند سرعت انتشار را تعدیل کنند.



شکل ۲: رفتار $\varphi(t)$ برای مقادیر مختلف $\nu = ۰/۵, ۰/۸, ۱$.

شکل ۲، نمودار سه منحنی را برای مقادیر مختلف نشان می‌دهد و به وضوح تأثیر افزایش حافظه (کاهش ν) را در کند کردن روند همه‌گیری بیماری نمایش می‌دهد.

۶ نتیجه‌گیری

در این مقاله، از چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم همراه با عملگرهای کسری آتانگانا–بالینو برای حل یک سیستم دینامیکی معادلات دیفرانسیل جفت شده گسترش بیماری کرونا استفاده شد. یافته‌ها حاکی از آن است که روش پیشنهادی از نظر معیارهای سنجش خطا شامل MSE و MAE، در مقایسه با روش چبیشف نوع اول، از دقت بالاتری برخوردار است. همچنین نرخ همگرایی سریع‌تر و کارایی محاسباتی بهتری مشاهده شد. بررسی پارامتر ν نیز تأثیر معنادار حافظه بلندمدت را در دینامیک بیماری نشان داد. با توجه به ساده‌سازی‌های صورت گرفته در مدل، پیشنهاد می‌گردد در مطالعات آتی با افزودن گروه‌های جمعیتی دیگر و در نظرگیری پارامترهای وابسته به زمان، مدل گسترش یابد. همچنین تعمیم روش به مسائل کنترل بهینه کسری و اعتبارسنجی با داده‌های واقعی از جمله گام‌های پیش رو خواهد بود.

فهرست منابع

[1] Kermack, W.O. and McKendrick, A.G., 1927. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society A*, 115 (772), pp.700–721. https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118.

[2] Hethcote, H.W., 2000. The mathematics of infectious diseases. *SIAM Review*, 42 (4), pp.599–653. https://doi.org/10.1137/S0036144500371907

[3] Brauer, F., Castillo-Chavez, C. and Feng, Z., 2019. Mathematical Models in Epidemiology. Springer. 40 (2). https://doi.org/10.1007/978-1-4939-9828-9

[4] Losada, J. and Nieto, J.J., 2015. Properties of a new fractional derivative without singular kernel. *Progr. Fract. Differ. Appl*, 1 (2), pp.87–92. https://doi.org/10.12785/pfda/010202

[5] Alkahtani, B.S.T., 2016. Chua's circuit model with Atangana–Baleanu derivative with fractional order. *Chaos, Solitons & Fractals*, 89, pp.547–551. doi: 10.1016/j.chaos.2016.03.020

[6] Khan, M.A. and Atangana, A., 2020. Modeling the dynamics of novel coronavirus (2019-nCoV) with fractional derivative. *Alexandria Engineering Journal*, 59 (4), pp.2379–2389. https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.02.033

[7] Baleanu, D., Jajarmi, A., Mohammadi, H. and Rezapour, S., 2020. A new study on the mathematical modeling of human liver with Caputo–Fabrizio fractional derivative. *Chaos, Solitons & Fractals*, 134, 109705. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109705

[8] Sweilam, N.H., Al-Mekhlafi, S.M. and Baleanu, D., 2019. Optimal control for a fractional tuberculosis infection model including the impact of diabetes and resistant strains. *Journal of Advanced Research*, 17, pp.125-137. doi: 10.1016/j.jare.2019.01.007

[9] Aslam, M., Murtaza, R., Abdeljawad, T. and Rahman, G.u., 2021. fractional order HIV/AIDS epidemic model with Mittag-Leffler kernel. *Aslam et al. Advances in Difference Equations*, 107 (2021). https://doi.org/10.1186/s13662-021-03264-5

[10] Podlubny, I., 1999. Fractional differential equation. *Academic Press*. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-9828-9

[11] Atangana, A. and Araz, S.I., 2020. Modeling the spread of COVID-19 with fractional derivatives: A novel approach. *Chaos, Solitons & Fractals*, 139, 110048. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110048

[12] Diethelm, K., 2010. The Analysis of Fractional Differential Equations. *Springer*, https://doi.org/10.1007/978-3-642-14574-2

[13] Atangana, A. and Baleanu, D., 2016. New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model. *Thermal Science*, 20 (2), pp.763–769. doi: 10.2298/TSCI160111018A

[14] Atangana, A., 2017. Fractional operators with constant and variable order with application to geo-hydrology. *Elsevier Science*. https://public.ebookcentral.proquest.com/choice/publicfullrecord.aspx?p=262297

[15] Amouch, M. and Karim, N., 2025. Fractional-order mathematical modeling of COVID-19 dynamics with different types of transmission. *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 15 (2), pp.386-415. doi: 10.3934/naco.2023019

[16] Tuan, N.H., Mohammadi, H. and Rezapour, S., 2020. A mathematical model for COVID-19 transmission by using the Caputo fractional derivative. *Chaos, Solitons & Fractals*, 140, 110107. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110107

[17] Nandhini, M., Lavanya, R. and Nieto, J.J., 2022. A Fractional COVID-19 Model with Efficacy of Vaccination. *Axioms*, 11 (9), pp.446-458. https://doi.org/10.3390/axioms11090446

[18] Denu, D. and Kermausuor, S., 2022. Analysis of a Fractional-Order COVID-19 Epidemic Model with Lockdown. *Vaccines*, 10 (11), 1773. doi: 10.3390/vaccines10111773

[19] Ullah, S., Khan, M.A., Farooq, M. and Hammouch, Z., 2020. A fractional model for the dynamics of tuberculosis infection using Caputo–Fabrizio derivative. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 13 (3), pp.975–993. doi: 10.3934/dcdss.2020057

[20] Hadid, S. B., Ibrahim, R. W., Altulea, D. and Momani, S., 2020. Solvability and stability of a fractional dynamical system of the growth of COVID-19 with approximate solution by fractional Chebyshev polynomials. *Advances in Difference Equations*, 338 (2020), pp.1–16. https://doi.org/10.1186/s13662-020-02791-x

[21] Bhrawy, A.H., Tharwat, M.M. and Yildirim, A., 2013. A new formula for fractional integrals of Chebyshev polynomials application for solving multi-term fractional differential equations. *Appl. Math. Model*, 37 (6), pp.4245–4252. doi: 10.1016/j.apm.2012.08.022

[22] Shen, J., Tang, T. and Wang, L.L., 2011. Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications. *Springer*. https://doi.org/10.1007/978-3-540-71041-7

[23] Bhrawy, A.H. and Zaky, M.A., 2015. A method based on the Jacobi tau approximation for solving multi-term time–space fractional partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 281, pp.876–895. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.10.060

[24] Parand, K. and Delkhosh, M., 2017. Accurate solution of the Thomas-Fermi equation using the fractional order of rational Chebyshev functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 317 (1), pp.624–642. doi: 10.1016/j.cam.2016.11.035

[25] Mahmoud, S., El-Kady, M. and Abdelhakem, M., 2025. Pseudo-spectral second kind Chebyshev polynomials differentiation matrices for solving high-order nonlinear differential equations. *J. Appl. Math. Comput*, 71, pp.8531–8563. https://doi.org/10.1007/s12190-025-02602-0

Approximate Solution of coupled differential equations system for Corona disease based on the Second Kind Chebyshev Polynomial

Jamileh Dehghan[1], **M. H. Atabakzadeh**[2*], **M. Alizadeh**[1], **S. Shokrollahi Yancheshmeh**[1]

[1]Department of Mathematics, Ahv.C., Islamic Azad University, Ahvaz, Iran
[2]Department of Mathematics, Bu.C., Islamic Azad University, Bushehr, Iran

Received: 6 July 2025 Accepted: 9 June 2026

Communicated by: Ali Reza Fakharzadeh Jahromi

Abstract: In this paper, a system of coupled fractional differential equations that models the spread of COVID-19 infection between two population groups, "with symptoms of infection" $(\varphi(t))$ and "without symptoms of infection" $(\omega(t))$, is investigated. The proposed method is based on the Second Kind Chebyshev Polynomial with the Atangana-Baleanu fractional derivative and integral. The main innovation of this paper is to superiority of the accuracy and efficiency of this method compared to the conventional first-order Chebyshev method and the fourth-order Runge-Kutta method (RK4). For objective evaluation, the Mean Squared Error (MSE) and Mean Absolute Error (MAE) criteria were calculated. Numerical results for different values of the fractional order (ν) show that the proposed method has higher accuracy and efficiency with an MSE of about $10^{(-4)}$ and an exponential convergence rate. These findings confirm the high potential of the present method for more accurate modeling of epidemiological phenomena

Keywords: coupled differential equations system, Corona disease, Second Kind Chebyshev Polynomial, Atangana-Baleanu fractional derivative and integral.

©2024 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonComertial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/).